Lista 4 - compactos

Definição 1 *Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que uma família $\mathcal{C}$ é uma* **cobertura** *para X se $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = X$. Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma cobertura aberta se cada elemento de $\mathcal{C}$ for aberto. Dizemos que $\mathcal{C}'$ é uma* **subcobertura** *de $\mathcal{C}$ se $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ também for uma cobertura.*

1 Sejam (X, d) espaço métrico e $x \in X$. Mostre que $\{B_n(x) : n \in \mathbb{N}_{>0}$ é uma cobertura aberta para X.

Definição 2 *Dizemos que (X, τ) é* **compacto** *se para toda cobertura aberta $\mathcal{C}$ de X, existe $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ subcobertura finita.*

2 Mostre que se (X, τ) é um espaço topológico finito, então ele é compacto.

3 Mostre que $\mathbb{R}$ não é compacto.

Definição 3 *Seja (X, τ) espaço topológico. Dizemos que $Y \subset X$ é compacto se Y com a topologia induzida de subespaço é compacto.*

4 Este é um roteiro para mostrar que $[0, 1]$ é compacto. Seja $\mathcal{C}$ cobertura aberta para $[0, 1]$. Considere $A = \{x \in [0, 1]$: existe $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ finito tal que $[0, x] \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}'} C\}$.

(a) Mostre que A é não vazio e limitado superiormente;

(b) Note que $\sup A \leq 1$. Mostre que $\sup A = 1$. (suponha $\sup A < 1$ e chegue numa contradição);

(c) Mostre que $1 \in A$ (usando o item anterior);

(d) Conclua que $[0, 1]$ é compacto.

5 Mostre que todo subespaço fechado de um espaço compacto é compacto.

6 Seja X espaço de Hausdorff, $K \subset X$ compacto e $x \in X \smallsetminus K$. Mostre que existem A e B abertos disjuntos tais que $x \in A$ e $K \subset B$ (Dica: considere para cada $k \in K$, abertos A_k e B_k disjuntos tais que $x \in A_k$ e $k \in B_k$).

7 Mostre que num espaço de Hausdorff, todo compacto é fechado.

8 Mostre que em $\mathbb{R}$, todo compacto é fechado e limitado. Esse resultado vale para qualquer métrico?

9 Mostre que para qualquer $a < b \in \mathbb{R}$, $[a, b]$ é compacto (use que $[0, 1]$ é compacto).

10 Mostre que se A é fechado e limitado em $\mathbb{R}$, então A é compacto (você vai precisar usar que fechado em compacto é compacto...). Esse resultado vale para qualquer métrico?

11 Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Mostre que existe x tal que $f(x) = \max f[[a, b]]$.